σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
2004/1

DOĞRUSAL YÜZEYLERİN EĞRİSEL ASİMPTOTİKLERİ

Filiz KANBAY*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 09.04.2003 Kabul/Accepted: 07.01.2004

CURVILINEAR ASIMPTOTICS OF RULED SURFACES

ÖZET

Bu çalışmada bir doğrusal yüzeyin eğrisel asimptotik ailesi üzerinde durulmuş ve eğrisel asimptotik ailesinin eğriliğinin sıfırdan farklı bir sabit olamayacağı ispatlanmıştır. Ayrıca bulunan eğrilik bağıntısından bir yüzeyin kuvadrik olma koşulları elde edilmiştir.
Anahtar Sözcükler: Doğrusal yüzey, Asimptotik, Kuadratik, Eğrilik, Burulma

ABSTRACT

In this work, curvilinear asymptotic family of a ruled surface is studied and it is proved that the curvature of curvilinear asymtotic family can not be a constant which is differing from zero. From that, the condition that a surface to be a quadric surface is obtained.
Keywords: Ruled surface, Asymtotic, Quadric, Curvature, Torsion

---

1. GİRİŞ

Enneper teoremine göre bir yüzeyin asimptotik çizgilerinin burulması $t = \pm\sqrt{-K}$ bağıntısı ile verilir. Yüzey bir doğrusal yüzey ise, böyle bir yüzeyin bir asimptotik ailesinin doğrulardan oluşması ve bir doğrunun burulmasının da tanımsız olması nedeni ile bu teorem sadece eğrisel asimptotik ailesi için geçerlidir. Öte yandan bir doğrusal yüzeyin eğrisel asimptotik ailesinin burulmasının sabit olması halinde, bu sabitin sıfır olduğu, dolayısıyla, Enneper teoremi uyarınca da açılabilir bir doğrusal yüzey olduğu bilinmektedir [1, 2, 4].
Bu çalışmada bir doğrusal yüzeyin eğrisel asimptotik ailesinin burulması ile ilgili olan bu sonuçların, aynı ailenin eğriliği için de geçerli olduğu ; yani hiç bir doğrusal yüzeyde eğrisel asimptotik ailesinin eğriliğinin sıfırdan farklı bir sabite eşit olmayacağı ispat edilmiştir. Ayrıca bir eğrisel asimptotik ailesinin eğriliğinin sabit olması halinde bu sabitin sıfır olacağı gösterilerek; geodezik eğriliği sabit olan bir doğrusal yüzeyin bir kuvadrik olması nedeni ile, bir doğrusal yüzeyin kuvadrik olma koşullarını da elde etmek mümkün olmuştur.

---

* e-mail: fkanbay@yildiz.edu.tr ; tel: (0212) 449 1804

2. BİR DOĞRUSAL YÜZEYİN EĞRİSEL ASİMPTOTİK AİLESİ VE BU AİLENİN EĞRİLİĞİ

3 boyutlu Öklid uzayında bir doğrusal yüzey, doğuran adı verilen bir doğrunun hareketi ile doğurulan bir yüzey olarak tanımlanır. Böyle bir yüzey, $\mathbf{T}=\mathbf{T}(\boldsymbol{v})$ doğuran doğrultusundaki birim vektör, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\boldsymbol{v})$ yüzey üzerinde bulunan ve $\mathbf{T}$ yi dik olarak kesen keyfi bir eğri (doğrultman) olmak üzere

$$\mathbf{x}(u,v)=\mathbf{r}(\boldsymbol{v})+u\,\mathbf{T}(v) \qquad (1)$$

denklemi ile verilir. $\mathbf{T}=\mathbf{T}(v)$, bir birim küresel eğri olup yüzeyin doğrultman konisini belirler. Burada v bu küresel eğrinin yay uzunluğudur. O halde

$$\mathbf{T}^2(\boldsymbol{v})=\mathbf{T}'^2(\boldsymbol{v})=1 \quad , \ \mathbf{r}'(\boldsymbol{v})\cdot\mathbf{T}(\boldsymbol{v})=0 \qquad (\mathbf{T}\,.\,\mathbf{T}'=0) \qquad (2)$$

dır. $\boldsymbol{v}=$ sbt. ler doğuranları $\boldsymbol{u}=$ sbt. ler de dik yörüngeleri göstermektedir. Öte yandan

$$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{T}'=-s \quad , \quad \mathbf{r}'^2=b^2+s^2 \qquad (3)$$

ile belirli $s=s(v)$, $b=b(v)$ ye sırasıyla yüzeyin *boğaz noktasının apsisi* ve *dağılma parametresi* adı verilir [2]. (2) ve (3) denklemleri (1) de kullanılırsa doğrusal yüzeyin 1.ve 2. esas formun katsayıları ve Gauss eğriliği, sırasıyla

$$E=1\ ,\ F=0\ ,\quad G=(u-s)^2+b^2\ ,\quad (+\sqrt{EG-F^2}=w=+\sqrt{G}\equiv g\ );$$
$$L=0\quad ,\quad M=-\frac{b}{w}\quad ,\quad N=\frac{1}{w}\left\{D(v)\left[(u-s)^2+b^2\right]+(u-s)\,b'+b\,s'\right\}, \qquad (4)$$

$$K=\frac{LN-M^2}{w^2}=\frac{-b^2}{w^4} \qquad (5)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki $D(v)$ fonksiyonu, $b\neq 0$ için

$$D(v)=\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{T}''}{b}==\left(\mathbf{T},\mathbf{T}',\mathbf{T}''\right) \qquad (6)$$

şeklinde tanımlı olup, yüzeyin doğrultman konisini belirler. Çünkü, doğrultman koniyi belirleyen birim küresel eğrinin eğriliği ve burulması sırası ile

$$k^{\circ 2}=D^2+1\quad ,\quad t^{\circ}=\frac{D'}{1+D^2} \qquad (7)$$

verilir [3]. (5) e göre $K=0$ ile tanımlı açılabilir doğrusal yüzeyler $b=0$ ile karekterize edilir.

Yukarıda bir doğrusal yüzeyin eğrisel asimptotik ailesinin burulmasının sabit olması halinde bu sabitin sıfır ve dolayısıyla yüzeyin bir açılabilir doğrusal yüzey olduğunu belirtmiştik. Fakat açılabilir yüzeyde her iki asimptotik aile doğuranlar üzerinde çakıştığı için yüzey bir eğrisel asimptotik aile içermez. Yani eğrisel bir asimptotik çizgiler ailesi içeren bir doğrusal yüzeyde bu ailenin burulması sabit olamaz.

Burada eğrisel asimptotik çizgilerin eğrilikleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edeceğiz. (4) den eğrisel asimptotik çizgiler ailesinin diferansiyel denklemi

$$\frac{-2\,b}{\sqrt{G}}\,du+N\,dv=0 \qquad (\sqrt{G}=\sqrt{(u-s)^2+b^2}\ ) \qquad (8')$$

veya

$$Z=N\cdot\sqrt{G}=[D[(u-s)^2+b^2]+b'(u-s)+b\,s']\sqrt{(u-s)^2+b^2} \qquad (8)$$

olmak üzere

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{2b}{Z} \tag{9}$$

şeklinde elde edilir. Bu çizgilerin eğriliği de, asimptotiklerin k eğriliği, $k_g = g$ geodezik eğriliğine işaret farkı ile eşit olduğundan,

$$g = \frac{w}{ds^3}\{d^2v\,du - d^2u\,dv + \Gamma_{11}^2\,du^3 + [2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1]du^2dv - \Gamma_{22}^1\,dv^3 + \\ +[\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1]dudv^2\} \tag{10}$$

şeklinde yazılabilir.

Doğrusal yüzeyimiz için Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0 \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} \; , \; \Gamma_{22}^1 = \frac{GG_u}{2G} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

şeklindedir.

Asimptotik çizgilerin denkleminin $v = v(u)$ şeklinde olduğu varsayılırsa (9) dan

$$v'' = \frac{d^2v}{du^2} = -\frac{2b\,Z_u}{Z^2} + 4\left(\frac{b}{Z}\right)_v \frac{b}{Z}$$

yazılabilir. Buna göre (10)

$$\frac{g}{g}(Z^2 + 4b^2G)^{\frac{3}{2}} = \frac{4b(b'Z - b\,Z_v)}{Z^3} - \frac{2b\,Z_u}{Z^2} + \frac{4b\,G_u}{2ZG} + \frac{8b^3GG_u}{2GZ^3} + \frac{4b^2G_v}{2GZ^2} \tag{11}$$

şeklini alır.

Öte yandan (9) dan, (4) gereğince,

$$u - s = a \qquad (a_u = 1 \quad , \quad a_v = -s') \tag{12}$$

olmak üzere

$$Z_u = 2Da + b' \;\; ; \;\; Z_v = D'a^2 + (b'' - 2Ds')a + D'b^2 + 2b\,b'D + b\,s''$$

yazılabilir. Bu değerlerden, (9) ve (12) yardımıyla (11) nın a ya göre düzenlenmesi sonucunda

$$g\;g(Z^2 + 4b^2G)^{\frac{3}{2}} = 2b[3b'D - 2D'b]a^4 + 2b[3b'^2 - 2b\,b'' + 4b(b + Ds')]a^3 + \\ + 2b^2[2b(b'D - 2D'b + 3b's' - 2bs'']a^2 + 2b^3[3b'^2 + 4b\,Ds' + 4b^2 - 2bb'']a + \\ + 2b^4[3b's' - Db\,b' - 2bs'' - 2b^2D'] \tag{13}$$

elde edilir.

Şimdi g = sbt. olduğunu varsayalım. Bu taktirde (13) nın iki yanının karesi alınırsa, G nin (4) deki ve Z nin (8) deki ifadelerinden dolayı, yeni denklem, katsayılar v nin fonksiyonları olmak üzere $a(=(u-s))$ ya göre

$$A_{14}a^{14} + A_{13}a^{13} + \ldots.. + A_1a + A_o = 0 \tag{14}$$

özdeşliğine dönüşür. Bunun da sağlanması ancak tüm katsayılar sıfır ise mümkündür. Buna göre,

$$A_{14} = g^2D^6 = 0 \tag{15}$$

ve

$$A_8 = g^2[(2D^2b^2 + 2Db\,s' + b'^2 + 4b^2)^3 + \\ + 12D^2b'^2(D^2b^4 + 2Db^3s' + b^2s'^2 + 4b^4) + \\ + 12D^2b'^2(2D^2b^2 + 2Db\,s' + b'^2 + 4b^2)] = 0 \tag{16}$$

olmalıdır. (15) gereğince $g \neq 0$ ise $D = 0$ olur. $D = 0$ olması halinde A_8 katsayısı

$$g^2(b'^2 + 4b^2)^3 = 0$$

şeklini alır. Böylece açılabilir yüzeyleri konu dışı bırakmamız, yani $b \neq 0$ varsaymamız, bizi $g = 0$ sonucuna götürür. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem: Açılabilir olmayan bir doğrusal yüzeyde eğrisel asimptotik çizgilerin eğriliği sabit ise bu sabit sıfır olmak zorundadır.

3. EĞRİSEL ASİMPTOTİK ÇİZGİLERİ SABİT EĞRİLİKLİ, AÇILABİLİR OLMAYAN DOĞRUSAL YÜZEYLER

Burada yüzeyin açılabilir olmadığını ve eğrisel asimptotiklerinin $g = \text{sbt.}$ eğrilikli olduğunu varsayıyoruz. O halde $b \neq 0$ ve yukarıdaki teorem uyarınca $g = 0$ dır. $g = 0$ olduğundan eğrisel asimptotik çizgiler ailesi de doğrulardan oluşacak ve yüzey açılabilir olmadığından bu aile doğuranlar ailesinden farklı olacaktır. Yani yüzey iki kat doğrusal ve dolayısıyla kuvadrik olacaktır. Buna göre (13) özdeşliğinden açılabilir olmayan kuvadrikler için

$$\begin{aligned} &3b'D - 2D'b = 0 \\ &4b\,b'D - 3b's' + 2b\,s'' = 0 \qquad\qquad (17) \\ &4b\,s'D + 3b'^2 + 4b^2 - 2b\,b'' = 0 \qquad b \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(17) sisteminden açılabilir olmayan merkezli kuvadrikler için ($D \neq 0$)

$$\begin{aligned} &D = a_o b^{\frac{3}{2}} \ , \quad s' = -2a_o b^{\frac{3}{2}}(b + c_1) \qquad\qquad (18) \\ &b'^2 = -4a_o{}^2 b^5 - 8a_1 a_o{}^2 b^4 + a_2 b^3 - 4b^2 \\ &(a_o\ ,\ a_1\ ,\ a_2 = \text{sbt}\ ) \end{aligned}$$

paraboloidler için de $D = 0$ yazarak ve integral alarak

$$\begin{aligned} &b = \frac{b_o}{\cos^2 v} \\ &s' = b_1\, b^{\frac{3}{2}}\ ,\ D = 0 \qquad\qquad (19) \\ &(\ b_o\ ,\ b_1 = \text{sbt}\ ,\ b_o \neq 0) \end{aligned}$$

bulunur.

(17) ile tanımlı kuvadriklerden reel doğuranlı olan bir parçalı hiperboloid ve hiperbolik paraboloidi ele alarak, bu kuvadriklerin eksen uzunlukları cinsinden değerlerini (18) ve (19) ile karşılaştırıp söz konusu a_o, b_o , a_1 , b_1 sabitlerini belirleyelim.

3.1. Bir Parçalı Hiperboloidin Eksen Uzunlukları Cinsinden Büyüklükleri

$Oxyz$ dik eksen sisteminde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (20)$$

denklemi ile bilinen bir parçalı hiperboloidin

$$\mathbf{x}(z\ ,h\ ) = \mathbf{r}(z\ ) + h\,\mathbf{T}(z\ ) \qquad (21)$$

şeklindeki vektörel denklemini elde etmek üzere

$$\mathbf{r}(z) = [\ a\cos z\ ,\ b\sin z\ ,\ \ 0\ ] \tag{22}$$

boğaz elipsi doğrultman eğri olarak alınabilir. Bir doğuran ailesinin birim vektörü (20) den

$$\mathbf{T}(z) = [\frac{a}{p}\sin z\ ,-\frac{b}{p}\cos z\ ,-\frac{c}{p}\ ] \qquad (p^2 = a^2\sin^2 z + b^2\cos^2 z + c^2) \tag{23}$$

şeklinde bulunur. Buradaki $(z\ ,h\ )$ parametrelerinin (1) de verilen (u,v) parametrelerinden farklıdır. Aralarındaki ilişki (2) den (23) gereğince

$$v = s(z) = \int \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2\sin^2 z + a^2c^2\cos^2 z}}{p^2}\, dz$$

olmak üzere

$$v = s(z)\ \ ,\ \ u = h + j(z) \tag{24}$$

şeklindedir. (24) kullanılarak (21) den

$$\mathbf{x}_z = \mathbf{r}'(z) + h\mathbf{T}'(z) = j'(z)\mathbf{x}_u + s'(z)\mathbf{x}_\mathbf{v} \tag{25}$$

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{T}(z) = \mathbf{x}_\mathbf{u} \tag{26}$$

bulunur ve (22) ve (23) yerine yazılıp her iki yan $\mathbf{x}_\mathbf{u}$ ile çarpılarak,

$$(\ \mathbf{x}_u^{\ 2} = 1\ ,\ \ \mathbf{x}_\mathbf{v}^{\ 2} = a^2 + b^2\ \ ,\ \ \mathbf{x}_\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{v} = 0\ )$$

$$j' = \frac{c^2 - p^2}{p}$$

elde edilir. (25) de her iki yan $\mathbf{x}_\mathbf{v}$ ile çarpılıp u ya göre özdeşlik yazılarak

$$s = j + \frac{c^2(a^2 - b^2)\,p\sin z\,\cos z}{a^2b^2 + b^2c^2\sin^2 z + a^2c^2\cos^2 z} \tag{27}$$

ve u ya göre sabit terimler eşitlenerek

$$b = \frac{(abc)^2 p^4}{[a^2b^2 + b^2c^2\sin^2 z + a^2c^2\cos^2 z\,]^2}$$

$$[\,a^2b^2 + b^2c^2\sin^2 z + a^2c^2\cos^2 z = (a^2 + c^2)(b^2 + c^2) - c^2p^2\,] \tag{28}$$

$$(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) = A^2$$

elde edilir.

$$D = (\mathbf{T}, \frac{d\,\mathbf{T}}{d\,v}, \frac{d^2\mathbf{T}}{d\,v^2}) = \frac{p^6}{\sqrt{A^2 - c^2p^2}}(\mathbf{T}\ ,\mathbf{T}'\ ,\ \mathbf{T}'') \tag{29}$$

olup bu sonuçları (18) ile karşılaştırarak

$$a_o = -\frac{1}{\sqrt{a\,b\,c}}\quad ,\quad a_1 = \frac{a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{2\,a\,b\,c}\quad ,\quad a_2 = \frac{4}{a\,b\,c}(a^2 + b^2 - c^2)$$

olarak bulunur.

Özel olarak $a^2 - b^2 = 0$ ise dönel bir parçalı hiperboloid elde edilir çünkü (23) gereğince $p^2 = \text{sbt.}$ ve (27), (28), (29) gereğince $b' = 0$, $s'' = 0$, $D' = 0$ dır ve $D' = 0$ olması (7) gereğince bu yüzeyin doğrultman konisinin dönel olduğunu gösterir. $b' = 0$, $s'' = 0$, $D' = 0$ koşulu bilindiği gibi yüzeyin Weingarten yüzeyi olma koşuludur [2]. Weingarten yüzeyi olan reel doğuranlı açılabilir olmayan yegane kuvadrik: dönel bir parçalı hiperboloiddir.

3.2. Hiperbolik Paraboloidin Eksen Uzunlukları Cinsinden Büyüklükleri

$Oxyz$ dik eksen sisteminde

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

denklemi ile bilinen hiperbolik paraboloidin 3.1. de yapılan işlemlere paralel şekilde hareket ederek;

$$\mathbf{x}(z\ ,h\ )=\mathbf{r}(z\ )+h\,\mathbf{T}(z\ )$$

vektörel denklemi $\mathbf{r}(z\ )=(z\ ,0,\frac{z^{\,2}}{2a^2})$ ve $\mathbf{T}(z\ )=\frac{1}{p}(a^2,\,a\,b,z\ )$ olmak üzere elde edilir ve buradan

$$v=s(z\ )\ \ ,\ \ u=h+j\,(z\ )$$

dönüşümü ile

$$\frac{dv}{dz}=s'(z\ )=\sqrt{\mathbf{T}'^{2}}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{p^2} \tag{30}$$

$$j\,'(z\ )=\frac{p^2-a^2b^2}{a^2p} \qquad p^2=a^2(a^2+b^2)+z^{\,2}\ \ ;\ \ pp'=z$$

$$j\ -s\ =\frac{b^2pz}{a^2(a^2+b^2)}\ \ ,\ \ b\ =\frac{b\,p^2}{a\,(a^2+b^2)}\ \ ,\ \ D=0$$

bulunur ve (30) dan

$$\tan v=\frac{e}{a\sqrt{a^2+b^2}}\ \ ,\ \ p^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{\cos^2 v}\ \ ,\ \ b\ =\frac{ab}{\cos^2 v}$$

elde edilir. Bu sonuçların (13) ile karşılaştırılması ile bu sabitler

$$b_o=a\,b \qquad , \qquad b_1=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a\,b)^3}}$$

şeklinde bulunur.

Özel olarak $b_1=0$ hali hiperbolik paraboloidde $z=\text{sabit}$ kesitlerinin ikizkenar hiperboller olması özel halidir. Bu özel hiperbolik paraboloidlerde $s\,'=0$ dir. $b\,'=0$, $s\,'=0$, $D=0$ koşulu ise bilindiği gibi doğrusal minimal yüzey olma koşulu idi [2]. Böylece $D=0$ olan yüzeylere, minimal doğrusal yüzeyler (dik helikoidler) dışında bir örnek olarak hiperbolik paraboloidler de verilmiş olur ve $D=0$ olan yüzeylere hiperbolik paraboloidlerin gelişmişi gözü ile bakılabilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Füsun Uras ve Sayın hocam Prof. Dr. Ziya Soyuçok'a teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

[1] Eisenhart. L.P. "A Treatise On The Differantial Geometry Of Curves And Surfaces" Dover Publications, Inc., New York, 1960, 28, 241-248.

[2] Uras F., " Diferansiyel Geometri II. Dersleri" Yıldız Üniversitesi Yayınları 261, İstanbul, 1992.

[3] Kanbay F., " Doğrusal Yüzeylerin İzometrik Tasvirleri Üzerine" Yıldız Teknik Üniversitesi Dergisi, 2001-4.

[4] Blaschke, W., (1949), Diferansiyel Geometri Dersleri, (Çev. K. Erim), İstanbul Üniversitesi Yayını Nu. 433, İstanbul.